Concursul Național de Matematică pentru clasele a V-a – a VIII-a
„OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA” 2025
etapa județeană, 12.04.2025
clasa a VI- a

Subiectul I

Se consideră numărul $a=\frac{1}{5}+\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\cdots+\frac{50}{225}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{45}\right)$.

1) Arătați că a este număr natural, pătrat perfect.

2) Determinați $n\in\mathrm{N}$ astfel încât $\frac{a}{2n+1}\in\mathrm{Z}$.

Soluție:

1) $a=\frac{1}{5}+\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\cdots+\frac{50}{225}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{45}\right)$;

$a=\frac{1}{5}+\frac{2+5}{2\cdot5}+\frac{3+5}{3\cdot5}+\cdots+\frac{45+5}{45\cdot5}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{45}\right)$.................................2p

$a=\frac{1}{5}+\frac{2}{2\cdot5}+\frac{5}{2\cdot5}+\frac{3}{3\cdot5}+\frac{5}{3\cdot5}\ldots+\frac{45}{45\cdot5}+\frac{5}{45\cdot5}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{45}\right)$;

$a=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{5}+\frac{1}{45}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{45}\right)$...........................1p

$a=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\cdot45=9$..1p

2) $\frac{9}{2n+1}\in\mathrm{Z}\rightarrow 2n+\frac{1}{9}\in\mathrm{Z}\rightarrow 2n+1\in D_9=\{-9,-3,-1,1,3,9\}$...................... 1p

$2n=\{-10,-4,-2,0,2,8\}$..1p

$\left.\begin{array}{c} n=\{-5,-2,-1,0,1,4\} \\ dar\ n\in\mathrm{N}\end{array}\right\}\rightarrow n=\{0,1,4\}$...1p

Subiectul II

Un pachet de bomboane a fost împărțit la trei copii. Numărul bomboanelor primite de cei trei copii sunt invers proporționale cu numerele $20, 10$, respectiv 12. Unul dintre copii observă că a primit mai puțin cu 90 de bomboane, decât ar fi primit, dacă același pachet de bomboane s-ar fi împărți direct proporțional cu numerele $0{,}1$; $0{,}2$; respectiv $0,(3)$. Câte bomboane au fost în pachet? Câte bomboane a primit fiecare copil?

Soluție:

Fie a,b,c- numărul de bomboane primite de fiecare copil.

$\{a,b,c\}\ i.p.\{20,10,12\}\rightarrow a\cdot20=b\cdot10=c\cdot12=k$..2p

$a+b+c=x, x$ fiind numărul total de bomboane

$\frac{14k}{60} = x \to k = \frac{60x}{14}$;

$a = \frac{3x}{14}; b = \frac{6x}{14}; c = \frac{5x}{14}$ 1p

$\{a, b, c\}$ $d.p.$ $\{0{,}1; 0{,}2; 0,(3)\} \to \cdots \to a = \frac{t}{10}, b = \frac{t}{5}, c = \frac{t}{3}$....................................1p

$a + b + c = x$;

$\frac{19t}{30} = x \to t = \frac{30x}{19}$;

$a = \frac{3x}{19}, b = \frac{6x}{19}, c = \frac{10x}{19}$...1p

Verificăm pentru copilul 3 dacă a primit cu 90 de bomboane mai puțin.

$\frac{10x}{19} - \frac{5x}{14} = 90 \to x = 532$ 1p

Împărțire invers proprțional $a = 114, b = 228, c = 190$

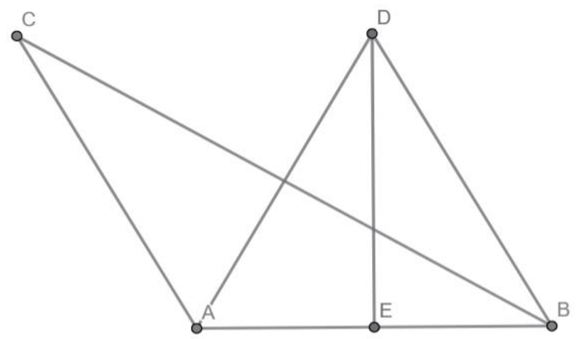
Împărțire direct proprțional $a = 84, b = 168, c = 280$

$280 - 190 = 90$ $(corect)$...1p

Subiectul III

Fie $\triangle ABC$ cu unghiul $\measuredangle A$ de 120°. Bisectoarea unghiului A taie mediatoarea laturii AB în punctul D. Arătați că dreptele AC și BD sunt paralele.

Soluție



Desen corect...2p

$(AD - bisectoarea\ \measuredangle BAC \to \measuredangle CAD \equiv \measuredangle BAD = 60^\circ$..1p

$\left.\begin{matrix} Fie\ DE - mediatoarea\ laturii\ [AB] \\ D \in DE \end{matrix}\right\} \to BD = DA \to \Delta DAB - isoscel$..............1p

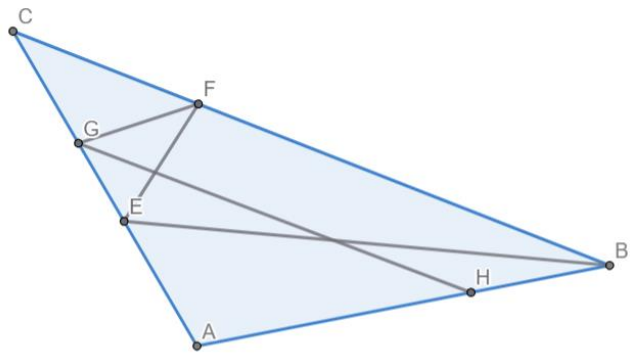
$\left.\begin{matrix} \Delta DAB - isoscel \\ dar\ \measuredangle BAD = 60^\circ \end{matrix}\right\} \to \Delta DAB - echilateral \to \measuredangle DBA = 60^\circ$..................................1p

$\measuredangle DBA + \measuredangle BAC = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ \begin{pmatrix} interne\ de\ aceeași\ parte\ a \\ secantei\ determinate \\ de\ dreptele\ BC\ și\ AD, \\ tăiate\ de\ secanta\ AB \end{pmatrix} \to AC \parallel BD$..............2p

Subiectul IV

Fie ABC un triunghi obtuzunghic isoscel cu baza $[BC]$. Fie $(BE$ bisectoarea $\measuredangle ABC$, $E \in AC$, $(EF$ bisectoarea $\measuredangle BEC$, $F \in BC$, $(FG$ bisectoarea $\measuredangle EFC$, $G \in AC$, $(GH$ bisectoarea $\measuredangle EGF$, $H \in AB$. Știind că dreptele GH și BC sunt paralele, determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Soluție



Desen corect..2p

În ΔABC,

$AB = CA \rightarrow \measuredangle C \equiv \measuredangle B = 2x \rightarrow \measuredangle A = 180^{\circ} - 4x$;

$90^{\circ} < \measuredangle A < 180^{\circ} \rightarrow \ 0^{\circ} < x < 22{,}5^{\circ}$ 1p

În ΔBEC,

$\measuredangle BEC = 180^{\circ} - 3x$;

$(EF - bisectoarea\, \measuredangle BEC \rightarrow \ \measuredangle BEF \equiv \measuredangle CEF = \frac{\measuredangle BEC}{2} = \frac{180^{\circ} - 3x}{2} = 90^{\circ} - \frac{3x}{2}$.........1p

În ΔEFC,

$\measuredangle EFC = 90^{\circ} - \frac{x}{2}$

$(FG - bisectoarea\, \measuredangle EFC \rightarrow \ \measuredangle EFG \equiv \measuredangle GFC = \frac{\measuredangle EFC}{2} = \frac{90^{\circ} - \frac{x}{2}}{2} = 45^{\circ} - \frac{x}{4}$..............1p

$\left.\begin{array}{r} GH \parallel BC \\ GF - secantă \end{array}\right\} \rightarrow \measuredangle HGF \equiv \measuredangle GFC = 45^{\circ} - \frac{x}{4}\ (alterne\ interne)$

$(GH - bisectoarea\, \measuredangle EGF \rightarrow \ \measuredangle HGE \equiv \measuredangle HGF = \frac{\measuredangle EGF}{2} = 45^{\circ} - \frac{x}{4}$

$\left.\begin{array}{r} GH \parallel BC \\ AC - secantă \end{array}\right\} \rightarrow \measuredangle HGE \equiv \measuredangle BCA\ (corespondente)$...1p

$45^{\circ} - \frac{x}{4} = 2x \rightarrow x = 20^{\circ}\ (convine\ pt\ că\ \ 0^{\circ} < x < 22{,}5^{\circ}) \rightarrow$

$\measuredangle BAC = 100^{\circ};\ \measuredangle ABC \equiv \measuredangle BCA = 40^{\circ}$..1p